



เอกสารประกอบการสอน
วิชาคณิตศาสตร์อุตสาหกรรม 2
รหัสวิชา 2000-1404

หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2556

เรียบเรียงโดย : นางพนิดา วงศ์ชุมภู

วิทยฐานะครูชำนาญการ

แผนกวิชาสามัญสัมพันธ์ วิทยาลัยเทคนิคลำปาง

สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา

กระทรวงศึกษาธิการ

ค่านำ

เอกสารประกอบการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์อุตสาหกรรม 2 รหัสวิชา 2000-1404 เล่มนี้
เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ สำหรับนักเรียนในระดับชั้นประกาศนียบัตร
วิชาชีพ (ปวช.) ประเภทวิชาอุตสาหกรรม โดยมีขอบเขตของเนื้อหาวิชาครอบคลุมและสอดคล้อง
กับจุดประสงค์รายวิชา มาตรฐานรายวิชา ตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2556
ของสำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ โดยเนื้อหาแบ่งออกเป็น 14 หน่วย
การเรียนรู้ ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้มีเนื้อหาสาระเหมาะสมกับผู้เรียน ใช้ภาษาที่เข้าใจง่าย เรียงลำดับ
ตามความสัมพันธ์ของเนื้อหาอย่างละเอียด มีตัวอย่างที่มุ่งเน้นให้ผู้เรียนเกิดความรู้ ความเข้าใจ เกิดทักษะ
กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ในเนื้อหาสาระการเรียนรู้ มีแบบฝึกทักษะที่มุ่งเน้นให้นักเรียนรู้จักคิด
วิเคราะห์ ตามกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการเรียนรู้ให้ดียิ่งขึ้น มีแบบทดสอบ
ก่อนเรียน ระหว่างเรียนและหลังเรียน เพื่อประเมินผลการเรียนรู้ของนักเรียนและให้นักเรียนทราบ
ความก้าวหน้าของตนเอง

ผู้เรียบเรียงขอขอบพระคุณ ครูอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชา ครูอาจารย์เจ้าของ
ตำราที่ได้นำมาใช้ในการอ้างอิง ตลอดจนผู้ที่ให้คำแนะนำ จนเอกสารประกอบการสอนเล่มนี้เสร็จ
สมบูรณ์ หวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารประกอบการเรียนเล่มนี้ จะสามารถก่อให้เกิดประโยชน์ต่อผู้เรียน
ครูผู้สอนและผู้สนใจทั่วไป หากมีข้อเสนอแนะประการใด ผู้เรียบเรียงยินดีรับไว้ด้วยความขอบคุณยิ่ง

นางพนิดา วงศ์ชุมภู

ครูชำนาญการ

วิทยาลัยเทคนิคลำปาง

จุดประสงค์การเรียนรู้รายวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม 2 รหัสวิชา 2000- 1404

จุดประสงค์รายวิชา เพื่อให้

1. มีความรู้ความเข้าใจ เกิดความคิดรวบยอดเกี่ยวกับ มุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ จำนวนเชิงซ้อน เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสามและประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น
2. มีทักษะกระบวนการคิดและนำวิธีการแก้ปัญหาเรื่อง มุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ จำนวนเชิงซ้อน เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสามและประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นในงานอาชีพ
3. มีเจตคติที่ดีในการเรียนรู้ มุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ จำนวนเชิงซ้อน เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกิน อันดับสาม และประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

มาตรฐานรายวิชา (สมรรถนะรายวิชา)

1. คาดคะเนระยะทางและความสูงโดยใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่กำหนด
2. ประยุกต์การวัดโดยใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ
3. ดำเนินการและคำนวณเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ
4. ประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับเมทริกซ์และการคำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์
5. ใช้ความรู้และทักษะเกี่ยวกับดีเทอร์มิแนนต์หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น
6. ดำเนินการและประยุกต์ใช้จำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้วในงานอาชีพ
7. ประยุกต์ใช้จำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังและรูปกรณฑ์ในงานอาชีพ

คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาเกี่ยวกับทักษะการคิดคำนวณ แก้ปัญหา เรื่องมุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของมุมจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย เทคนิคการจำค่า อัตราส่วนตรีโกณมิติ สมการตรีโกณมิติ กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ การประยุกต์ใช้ตรีโกณมิติในงานอาชีพ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสามและประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นในงานอาชีพ จำนวนเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้ว จำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังและรูปกรณฑ์ การประยุกต์ใช้จำนวนเชิงซ้อนในงานอาชีพ

หน่วยที่ 1. มุมและหน่วยการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ตรีโกณมิติ (Trigonometry) ตรงกับคำภาษากรีก คือ Trigonon (สามเหลี่ยม) Metron (การวัด)

ตรีโกณมิติ หมายถึง การวัดรูปสามเหลี่ยม ตรีโกณมิติ กำเนิดประมาณ ค.ศ. 146-126 ก่อนคริสต์ศักราช โดยนักดาราศาสตร์ชื่อ Hipparchus นำตรีโกณมิติไปใช้ทางดาราศาสตร์ ต่อมา Ptolemy (ค.ศ.200) พัฒนาวิชาตรีโกณมิติให้ก้าวหน้าขึ้น โดย Leonhard Euler ได้แยกตรีโกณมิติออกจากดาราศาสตร์แล้วตั้งเป็นแขนงวิชาหนึ่งในคณิตศาสตร์ ตรีโกณมิติได้พัฒนาขึ้นโดยลำดับนำไปใช้อย่างกว้างขวางในคณิตศาสตร์ชั้นสูง การศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นการคำนวณเกี่ยวกับด้านและมุม พื้นทีของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาวิชาอื่น ๆ ต่อไป

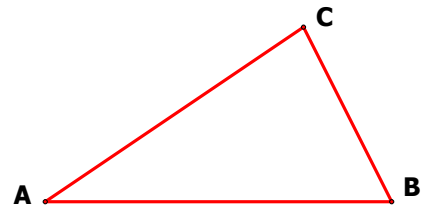
การเรียกชื่อมุม

การเรียกชื่อมุม นิยมเรียกเป็น อักษรภาษาอังกฤษ A,B,C,...

อาจเรียกชื่อแทนมุม เป็นอักษรกรีก ก็ได้ เช่น

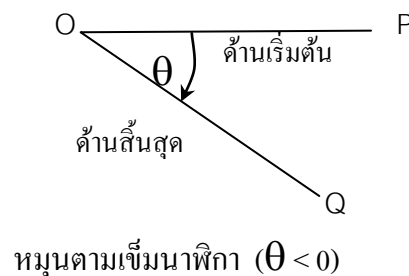
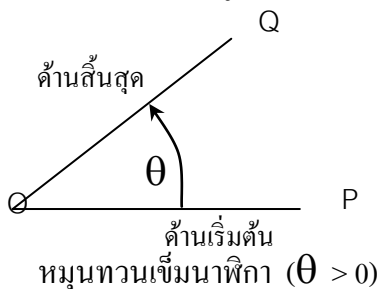
θ อ่านว่า ทีตา(theta) β อ่านว่า เบต้า (Beta)

α อ่านว่า อัลฟา (Alpha) γ อ่านว่า แกมมา (Gamma)

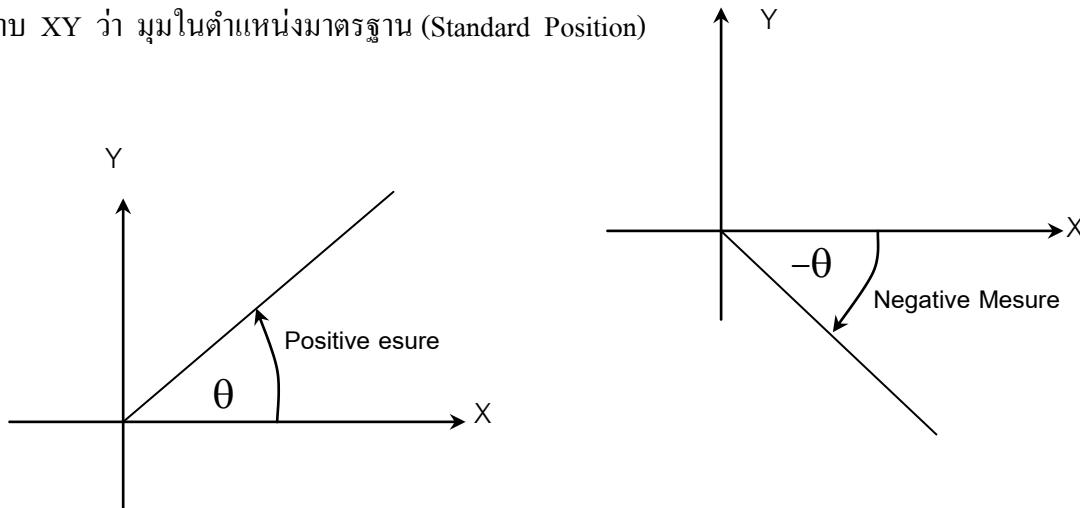


มุมและการวัดมุม

กำหนดส่วนของเส้นตรง OP (ส่วนของเส้นตรง OP เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ \overline{OP}) ถ้าหมุนส่วนของเส้นตรง OP โดยใช้จุด O เป็นจุดหมุน และหมุนไปอยู่ในแนวเดียวกันกับส่วนของเส้นตรง OQ จะเกิดมุมขึ้นที่จุด O ดังรูป



จากรูป จะเรียกจุด O ว่า จุดยอด (Vertex) ของมุม หรือเขียนแทนมุม O ด้วย \widehat{POQ} (อ่านว่า มุม POQ) เรียกส่วนของเส้นตรง OP ว่า ด้านเริ่มต้น (Initial Side) ของมุม และเรียกส่วนของเส้นตรง OQ ว่า ด้านสิ้นสุด (Terminal Side) ของมุม
กรณีจุดยอดของมุมอยู่ที่จุดเริ่มต้น (Origin) และรัศมีเริ่มต้นอยู่ในแนวแกน X ด้านบวก ซึ่งจะเรียกมุมในระนาบ XY ว่า มุมในตำแหน่งมาตรฐาน (Standard Position)



จะเห็นว่า การวัดมุมมี 2 ลักษณะ คือ การวัดมุมที่เป็นบวกและการวัดมุมที่เป็นลบ ดังรูป

- การวัดมุมในทิศทวนเข็มนาฬิกา คือ การวัดมุมจากด้านเริ่มต้นของมุมไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาจนถึงด้านสิ้นสุดของมุม ซึ่งการวัดมุมแบบนี้ เราถือว่าเป็นมุมบวก
- การวัดมุมในทิศตามเข็มนาฬิกา คือ การวัดมุมจากด้านเริ่มต้นของมุมไปในทิศตามเข็มนาฬิกาจนถึงด้านสิ้นสุดของมุม ซึ่งการวัดมุมแบบนี้ เราถือว่าเป็นมุมลบ

หน่วยการวัดมุม

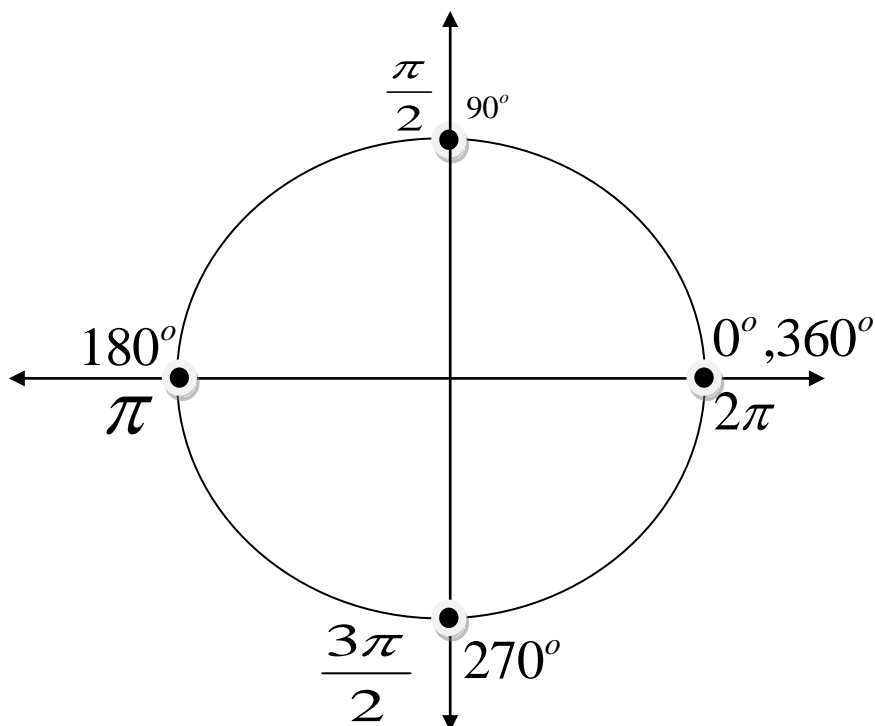
1. การวัดมุมในหน่วยองศา (Degree)

คือมุมที่เกิดจากการหมุนส่วนของเส้นตรงไปครบ 1 รอบ มีขนาด 360 องศา

นิยมใช้กับการเดินเรือและในทางดาราศาสตร์

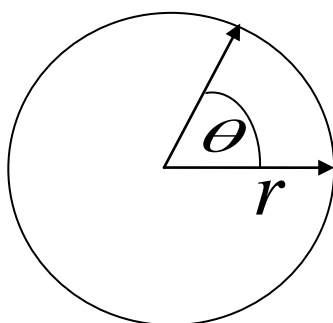
1 องศา	เท่ากับ	60	ลิปดา (minute)
1 ลิปดา	เท่ากับ	60	ฟิลิปดา (second)
1 องศา	เท่ากับ	3,600	ฟิลิปดา (second)

Note สัญลักษณ์วงกลมเล็ก $^{\circ}$ ใช้แทนหน่วยองศา
ซึ่งเป็นหน่วยเดียว ที่เมื่อเขียนหน่วยแล้วไม่ต้องเว้นวรรค
ระหว่างตัวเลขกับสัญลักษณ์ เช่น 60° แทนมุมขนาด 60 องศา



2. การวัดมุมเป็นเรเดียน (Radian)

ขนาดของมุมมีค่าเท่ากับ อัตราส่วนของความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้น
กับความยาวของรัศมีวงกลม



$$\theta = \frac{\text{ความยาวส่วน โค้งที่รองรับมุม}}{\text{ความยาวรัศมี}}$$

$$\text{หมุนครบ 1 รอบ } 360 \text{ องศา} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ เรเดียน}$$

ความสัมพันธ์ของมุมหน่วยองศาและหน่วยเรเดียน

360 องศา = 2π เรเดียน	180 องศา = π เรเดียน
1 องศา = $\frac{\pi}{180}$ เรเดียน	1 เรเดียน = $\frac{180}{\pi}$ องศา

Note 1 องศา = $57^{\circ}18'$ มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมนิยมวัดเป็นเรเดียน

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $\theta = 5$ เรเดียน แล้ว θ จะเท่ากับกี่องศา ลิปดา ฟลิปดา

วิธีทำ	1	เรเดียน	=	$\frac{180}{\pi}$	องศา
	5	เรเดียน	=	$\frac{180}{\pi} \times 5 = 286.48$	องศา
	1	องศา	=	60	ลิปดา
	0.48	องศา	=	$60 \times 0.48 = 28.8$	ลิปดา
	1	ลิปดา	=	60	ฟลิปดา
	0.8	ลิปดา	=	$60 \times 0.8 = 48$	ฟลิปดา

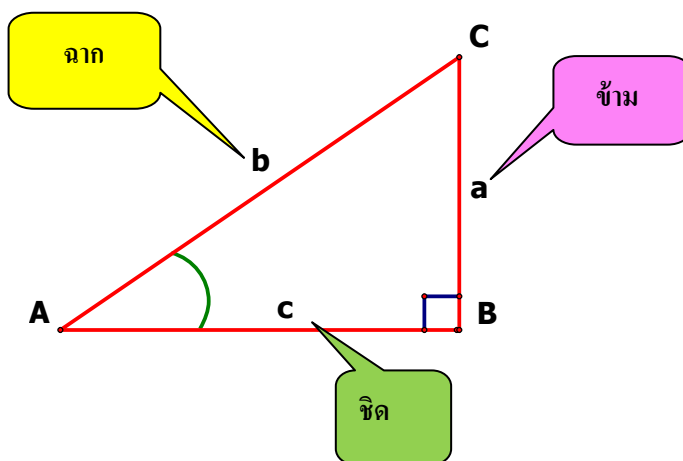
ดังนั้น มุม 5 เรเดียน = 286 องศา 28 ลิปดา 48 ฟลิปดา

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ มี 6 ฟังก์ชัน

1. sine เขียนย่อๆเป็น sin
2. Cosin เขียนย่อๆเป็น cos
3. tangent เขียนย่อๆเป็น tan
4. cotangent เขียนย่อๆเป็น cot
5. secant เขียนย่อๆเป็น sec
6. cosecant เขียนย่อๆเป็น cosec หรือ csc

การเขียนฟังก์ชันตรีโกณมิติต้องเขียนร่วมกับมุมเสมอ เช่น $\sin \theta$, $\cos B$, $\tan 30^\circ$, $\operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3}$, $\cot 150^\circ$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A

มองมุม A เรียก a ว่า ด้านตรงข้ามมุม A เรียก b ว่า ด้านตรงข้ามมุม B เรียก c ว่า ด้านตรงข้ามมุม C

$$\sin A = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{a}{b} \quad \text{ส่วนกลับ คือ } \operatorname{cosec} A \quad \text{ดังนั้น } \operatorname{cosec} A = \frac{b}{a}$$

$$\cos A = \frac{\text{ด้านประชิดมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{c}{b} \quad \text{ส่วนกลับ คือ } \sec A \quad \text{ดังนั้น } \sec A = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ด้านประชิดมุม A}} = \frac{a}{c} \quad \text{ส่วนกลับ คือ } \cot A \quad \text{ดังนั้น } \cot A = \frac{c}{a}$$

Note

$0 < \sin A < 1$ ข้าม <ฉาก เสมอ	$0 < \cos A < 1$ ชิด <ฉาก เสมอ	$\operatorname{csc} A > 1$ เสมอ ฉาก >ข้าม เสมอ
------------------------------------	-----------------------------------	---

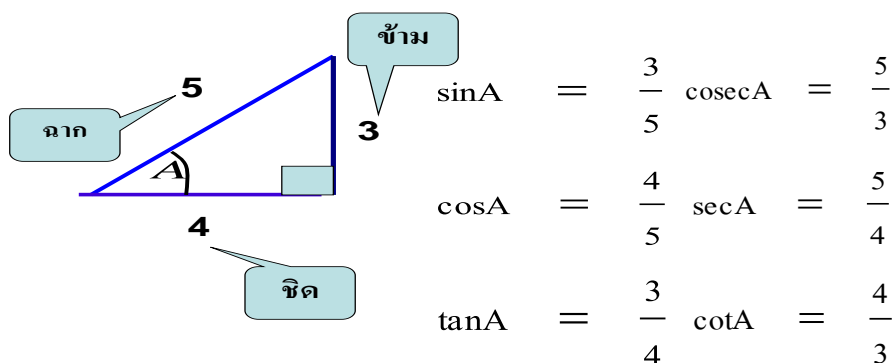
$\tan A > 0$ เสมอ	$\cot A > 0$ เสมอ	$\sec A > 1$ เสมอ
ฉาก >ชิด เสมอ		

Sin คือ ข้ามหารด้วยฉาก
 ชิด หารฉากได้ cos หนา
 ข้าม หาร ชิด คือ tan ตามตำรา
 อีกสามค่า คือ ส่วนกลับ เท่านั้นเอ๋ย

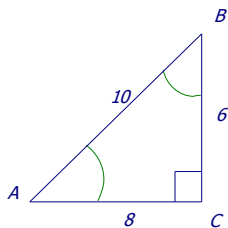


ตัวอย่างที่ 1 จากรูปจงหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

- 1) $\sin A$ 2) $\cos A$ 3) $\tan A$ 4) $\operatorname{cosec} A$ 5) $\sec A$ 6) $\cot A$



ตัวอย่างที่ 2 จากรูปจงหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ ต่อไปนี้



- 1) $\sin A$ 2) $\cos A$ 3) $\tan A$ 4) $\operatorname{cosec} A$ 5) $\sec A$ 6) $\cot A$
 7) $\sin B$ 8) $\cos B$ 9) $\tan B$ 10) $\operatorname{cosec} B$ 11) $\sec B$ 12) $\cot B$

$$\sin A = \frac{6}{10} \quad \operatorname{cosec} A = \frac{10}{6}$$

$$\cos A = \frac{8}{10} \quad \sec A = \frac{10}{8}$$

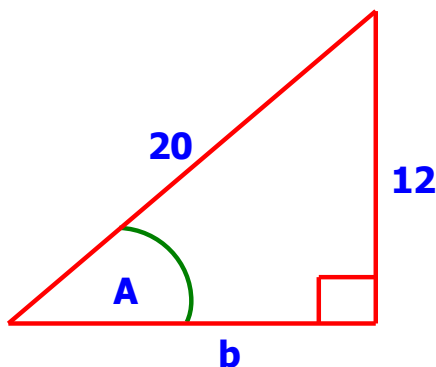
$$\tan A = \frac{6}{8} \quad \cot A = \frac{8}{6}$$

$$\sin B = \frac{8}{10} \quad \operatorname{cosec} B = \frac{10}{8}$$

$$\cos B = \frac{6}{10} \quad \sec B = \frac{10}{6}$$

$$\tan B = \frac{8}{6} \quad \cot B = \frac{6}{8}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $\sin A = \frac{12}{20}$ จงหา $\sin^2 A + \cos^2 A$



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$20^2 = 12^2 + b^2$$

$$400 = 144 + b^2$$

$$400 - 144 = b^2$$

$$256 = b^2$$

$$\sqrt{256} = b$$

$$b = 16$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{12}{20}\right)^2 + \left(\frac{16}{20}\right)^2$$

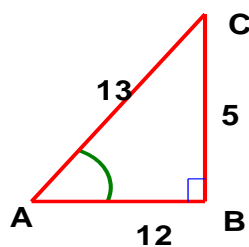
$$= \frac{144}{400} + \frac{256}{400}$$

$$= \frac{400}{400}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad \underline{\underline{Ans}}$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B เป็นมุมฉาก

ถ้า $\cot A = \frac{12}{5}$ แล้ว $10 \operatorname{cosec} A + 12 \sec A$ มีค่าเท่าใด (O-NET 49) ม.6



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 12^2 + 5^2$$

$$c^2 = 144 + 25$$

$$c^2 = 169$$

$$c = \sqrt{169}$$

$$c = 13$$

$$10 \operatorname{cosec} A + 12 \sec A$$

$$= 10 \left(\frac{13}{5} \right) + 12 \left(\frac{13}{12} \right)$$

$$= 26 + 13$$

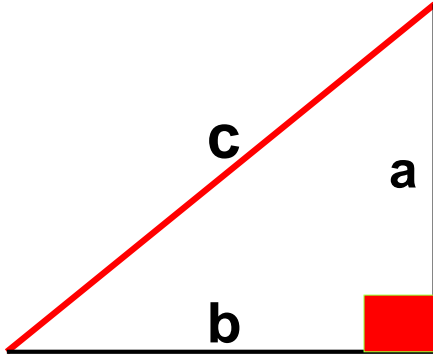
$$= 39$$

แบบทดสอบ

- 1) มุม $\frac{5\pi}{4}$ เรเดียน เท่ากับกี่องศา
- 2) มุม 108 องศา เท่ากับกี่เรเดียน
- 3) กำหนด $\sin A = \frac{5}{13}$ จงหาค่าของ $\sin^2 A + \cos^2 A$
- 4) กำหนด $15 \tan \theta = 8$ จงหาค่าของ $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$
- 5) กำหนด $\cos A = \frac{2}{3}$ จงหาค่าของ $\sin^2 A + \cos^2 A$
- 6) กำหนด $30 \cos \theta = 18$ จงหาค่าของ $3 \cos \theta + \sec \theta - \operatorname{cosec} \theta$

เสริมทักษะ

Pythagorean Triple

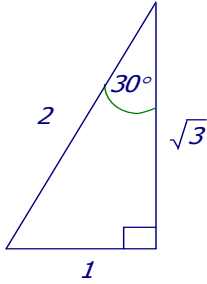
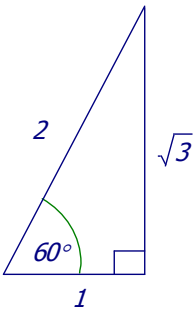
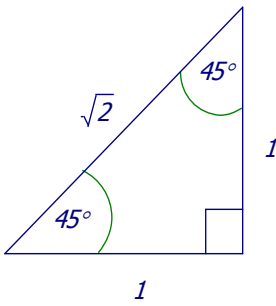


a	b	c
3	4	5
5	12	13
6	8	10
7	24	25
8	15	17
9	40	41
11	60	61
12	35	37
13	84	85
16	63	65
20	21	29

หน่วยที่ 2 เทคนิคการจำค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ

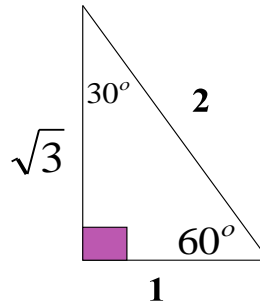
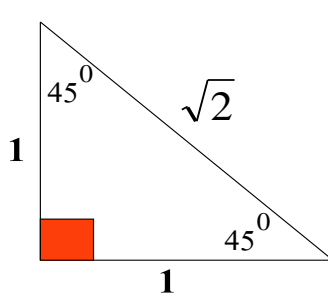
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° , 60°

โจทย์การประยุกต์ตรีโกณมิติจะพบและถูกนำมาใช้มากที่สุดคือฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° , 60° เราต้องจำให้ได้ ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมอื่นๆ การหาค่าให้เปิดตารางจากภาคผนวกท้ายเล่ม ตารางแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° , 60° จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

			
ฟังก์ชัน / มุม	30°	60°	45°
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
Tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1
Cosec	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$
Sec	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\sqrt{2}$
cot	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1

เทคนิคการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

วิธีที่ 1. เขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉากพร้อมความยาวของด้าน



แล้วใช้บทนิยาม

$$\sin A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$$

$$\cos A = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$$



วิธีที่ 2. หาค่าจากระบบตาราง

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	$\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{4}}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$	$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}}$
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}$	$\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{4}}$
	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan = \frac{\sin}{\cos}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	หาค่าไม่ได้



Sin เรียงเป็น 0,1,2,3,4

Cos เรียงกลับเป็น 4,3,2,1,0

วิธีที่ 3. การหาค่าจากระบบบนฝ่ามือ

กฎมือซ้าย

0° 30° 45° 60° 90°

$\sin \theta = \frac{\sqrt{\text{ซ้าย}}}{2}$

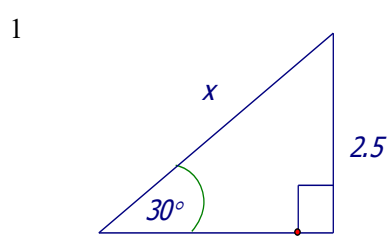
$\cos \theta = \frac{\sqrt{\text{ขวา}}}{2}$

$\tan \theta = \sqrt{\frac{\text{ซ้าย}}{\text{ขวา}}}$

ตารางฝึกหาค่ามุมจากมือซ้าย

	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
tan	$\sqrt{\frac{0}{4}} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{2}} = 1$	$\sqrt{\frac{3}{1}} = \sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{4}{0}}$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 1 จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้จงหาค่า x

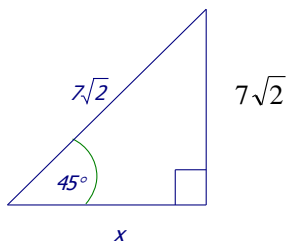


$$\sin 30^\circ = \frac{2.5}{x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2.5}{x}$$

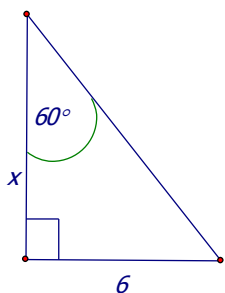
$$x = 5 \text{ หน่วย}$$

2.



$$\begin{aligned}\cos 45^\circ &= \frac{x}{7\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{x}{7\sqrt{2}} \\ x &= \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ x &= 7 \text{ หน่วย}\end{aligned}$$

3.



$$\begin{aligned}\tan 60^\circ &= \frac{6}{x} \\ \sqrt{3} &= \frac{6}{x} \\ x &= \frac{6}{\sqrt{3}} \text{ หน่วย}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\cos 30^\circ \tan 30^\circ \sec 60^\circ$ วิธีทำ $\cos 30^\circ \tan 30^\circ \sec 60^\circ$

$$\begin{aligned}&= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{1} \\ &= 1\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\cos 60^\circ \sin 60^\circ \operatorname{cosec} 30^\circ \sec 60^\circ$ วิธีทำ $\cos 60^\circ \sin 60^\circ \operatorname{cosec} 30^\circ \sec 60^\circ$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{1} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $2\cos^2 30^\circ + \frac{2}{3}\sin^2 30^\circ$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 2 \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{6}{4} + \frac{2}{12} \\ &= \frac{18}{12} + \frac{2}{12} \\ &= \frac{20}{12}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $2\cos^2 \frac{\pi}{4} + 4\sin^2 \frac{\pi}{4} + 3\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{3}$

$$= 2\cos^2 45^\circ + 4\sin^2 45^\circ + 3\operatorname{cosec}^2 60^\circ$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= 2 \times \frac{2}{4} + 4 \times \frac{2}{4} + 3 \times \frac{4}{3}$$

$$= 1 + 2 + 4$$

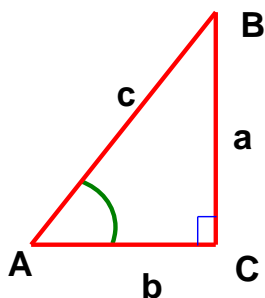
$$= 7$$

Note

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = 45^\circ$$

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 60^\circ$$

Note โคฟังก์ชัน (Co-function)



จากรูป $A + B = 90^\circ$ และจะได้ว่า

$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \sin B$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \cot B$$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \tan B$$

$$\sec A = \frac{c}{b} = \csc B$$

$$\csc A = \frac{c}{a} = \sec B$$

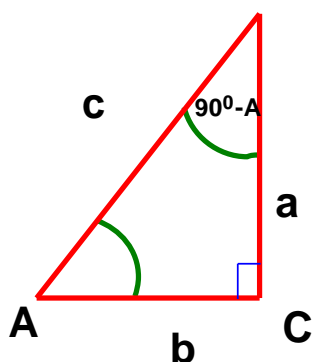
ถ้า $A + B = 90^\circ$ จะได้ว่า

และจะได้ว่า

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ, \quad \sin 80^\circ = \cos 20^\circ$$

$$\tan 60^\circ = \cot 30^\circ, \quad \tan 89^\circ = \cot 1^\circ$$

$$\sec 45^\circ = \csc 45^\circ, \quad \sec 10^\circ = \csc 80^\circ$$



$$1. \sin 21^\circ = \cos 69^\circ$$

$$2. \sin 21^\circ = \cos 21^\circ$$

$$3. \cos 21^\circ = \tan 69^\circ$$

$$4. \tan 21^\circ = \cos 69^\circ$$

การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ค่าโดยประมาณของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมแหลม มีการจัดทำในรูปของตาราง แต่ละตารางที่ผนวกไว้ในตำราอาจแตกต่างกันบ้าง บางตำรามีค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งหกฟังก์ชัน บางตำราจำกัด เพียงฟังก์ชันไซน์ โคไซน์และแทนเจนต์ ในเอกสารเป็นตารางบอกค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมตั้งแต่ 0 องศา ถึง 90 องศา หรือมุมตั้งแต่ 0 เรเดียน ถึง 1.5708 เรเดียน

วิธีอ่านจากตาราง

*ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติมีค่าถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 4

*เมื่อมุมที่กำหนดให้มีขนาดเล็กกว่า 45 องศา หรือ 0.7854 เรเดียน อ่านมุมจากคอลัมน์ซ้ายสุดของตาราง (Degree) และอ่านฟังก์ชันได้จากบรรทัดบนสุดของตาราง

*มุมขนาดโตกว่า 45 องศา อ่านมุมจากคอลัมน์ขวาสุดของตารางและอ่านฟังก์ชันได้จากบรรทัดล่างสุดของตาราง

* มุมแต่ละบรรทัดจะกำหนดขนาดของมุมห่างกัน 10 ลิปดา หากต้องการขนาดมุม เช่น $\sin 40^{\circ}15'$ ต้องใช้วิธีเทียบหาค่า

ตัวอย่างที่ 6 จงใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติเมื่อกำหนด มุมต่อไปนี้

$$\sin 25^{\circ} = 0.4226$$

$$\cos 36^{\circ}50' = 0.8004$$

$$\operatorname{cosec} 75^{\circ} = 1.035$$

$$\cos 84^{\circ}20' = 0.1987$$

$$\tan 84^{\circ}20' = 10.08$$

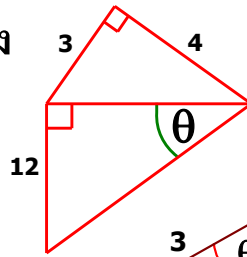
แบบทดสอบ จงหาค่าของ

- $2 \sin 60^{\circ} + \cos 30^{\circ} \tan 60^{\circ} \operatorname{cosec} 60^{\circ}$
- $\frac{\operatorname{cosec}^2 30^{\circ}}{1 + \cot^2 30^{\circ}}$
- $\frac{3}{4} \operatorname{cosec} 30^{\circ} \sec 30^{\circ} \cot 45^{\circ}$
- $\cos \frac{\pi}{3} - \tan^2 \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3} \tan^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6}$
- $\cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3}$

โจทย์เสริมประสบการณ์

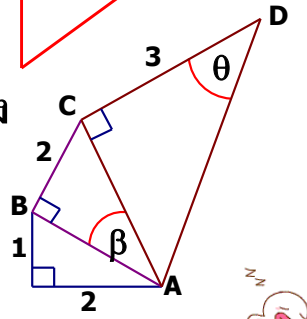
จากรูปจงหาค่าของ

$$\sec \theta + \cos \theta$$



จากรูปจงหาค่าของ

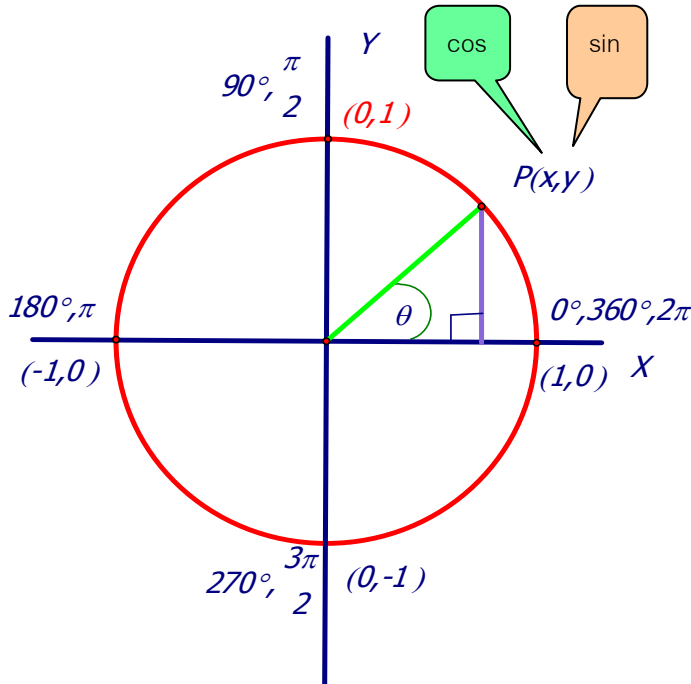
$$\tan \theta + \sin \beta$$



หน่วยที่ 3 วงกลมหนึ่งหน่วย

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมรอบจุดศูนย์กลาง

วงกลมหนึ่งหน่วย คือ วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) รัศมียาว 1 หน่วย



$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{1} = y, & \operatorname{cosec} \theta &= \frac{1}{y} \\ \cos \theta &= \frac{x}{1} = x, & \sec \theta &= \frac{1}{x} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x}, & \cot \theta &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$

$P(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$

ค่าของฟังก์ชัน $\sin \theta$, $\cos \theta$ ของมุมบนแกน X แกน Y

$\sin 0^\circ = 0$	$\sin 360^\circ = 0$
$\cos 0^\circ = 1$	$\cos 360^\circ = 1$
$\sin 90^\circ = 1$	$\sin 270^\circ = -1$
$\cos 90^\circ = 0$	$\cos 270^\circ = 0$
$\sin 180^\circ = 0$	$2 \sin \frac{\pi}{2} = (2)(1) = 2$
$\cos 180^\circ = -1$	$2 \sin 3\pi = (2)(0) = 0$
$2 \sin \frac{3\pi}{2} + 5 \cos \pi = (2)(-1) + (5)(1)$	
$= 3$	

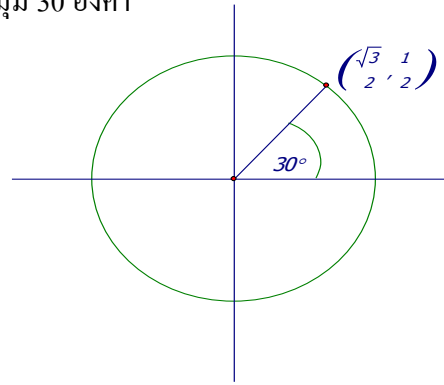
ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งหมดของมุม 30 องศา

วิธีทำ $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

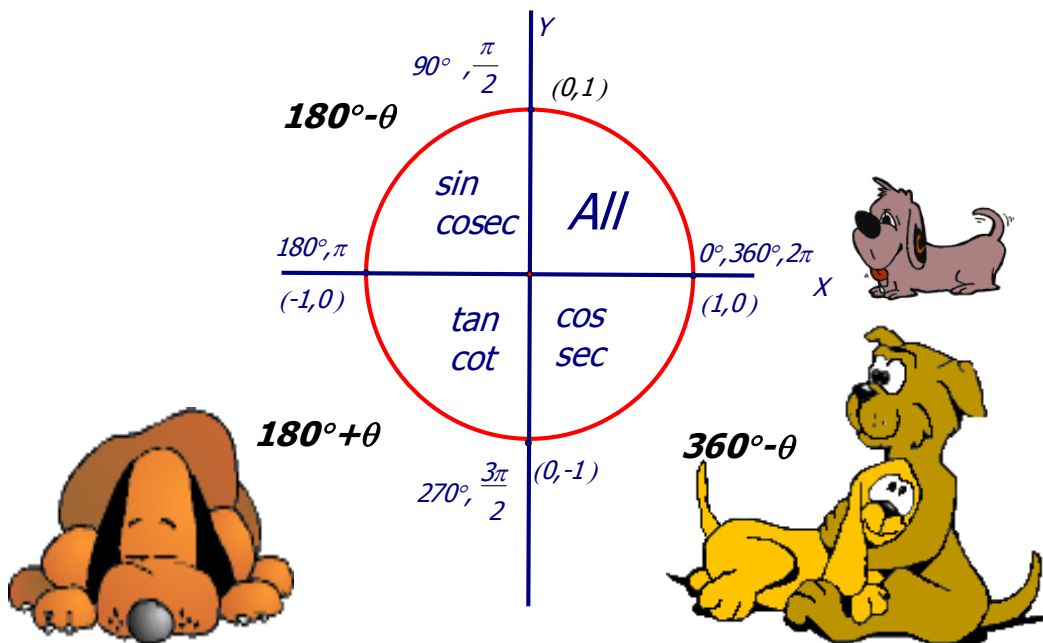


$$\operatorname{cosec} 30^\circ = 2$$

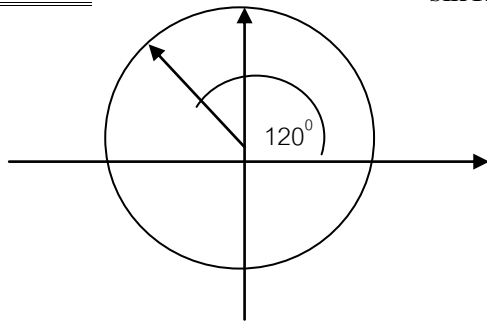
$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

สรุปฟังก์ชันที่มีเครื่องหมายบวก



ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\sin 120^\circ, \cos 120^\circ$

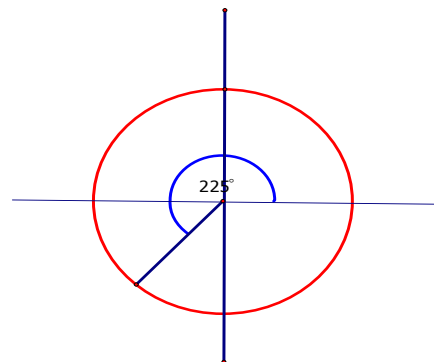


$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \sin 120^\circ &= \sin(180^\circ - 60^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 120^\circ &= -\cos(180^\circ + 60^\circ) \\ &= -\cos 60^\circ \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

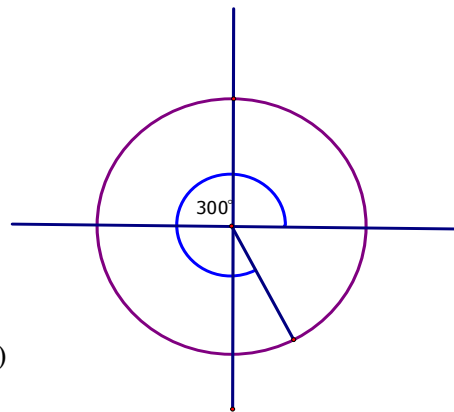
ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 225°

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \cos ec 225^\circ &= -\cos ec(180^\circ + 45^\circ) \\ &= -\cos ec 45^\circ \\ &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$



ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \sec 300^\circ &= \sec 300^\circ \\ &= \sec(360^\circ - 60^\circ) \\ &= \sec 60^\circ \\ &= 2 \end{aligned}$$



ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม $(n \cdot 360^\circ + \theta)$ หรือ $(2n\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \sin(n \cdot 360^\circ + \theta) &= \sin \theta \\ \cos(n \cdot 360^\circ + \theta) &= \cos \theta \\ \tan(n \cdot 360^\circ + \theta) &= \tan \theta \\ \operatorname{cosec}(n \cdot 360^\circ + \theta) &= \operatorname{cosec} \theta \\ \sec(n \cdot 360^\circ + \theta) &= \sec \theta \\ \cot(n \cdot 360^\circ + \theta) &= \cot \theta \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\sin 840^\circ$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \sin 840^\circ &= \sin(2 \times 360^\circ + 120^\circ) \\ &= \sin 120^\circ \\ &= \sin(180^\circ - 60^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาของ $\tan 1755^\circ$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \tan 1755^\circ &= \tan(4 \times 360^\circ + 315^\circ) \\ &= \tan 315^\circ \\ &= -\tan(360^\circ - 45^\circ) \\ &= -\tan 45^\circ \\ &= -1 \end{aligned}$$

แบบทดสอบ

จงหาค่าของ

- 1) $5 \sin \frac{\pi}{2} + 2 \cos \pi$
- 2) $\sin 2760^\circ$
- 3) $\cos 780^\circ$
- 4) $\tan 3150^\circ$
- 5) $\sec 4010^\circ$
- 6) $\cos 945^\circ$
- 7) $\cot 1000^\circ$
- 8) จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งหมดของมุม $\frac{11\pi}{6}$ พร้อมทั้งวาดรูปประกอบ
- 9) $\sin \pi + \sin 2\pi + \sin(-\pi)$ ตอบ 1
- 10) $\cos \pi + \cos 3\pi + \cos(-\pi)$ ตอบ -3
- 11) $\cos 3\pi + 2\cos(-\pi) + 5\sin \frac{3\pi}{2}$ ตอบ -8
- 12) $\sin^2 0 + \sin^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \pi + \cos^2 0 + \cos^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \pi$ ตอบ 3

เอกลักษณ์ (Identities) คือ สมการที่เป็นจริงเสมอ

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่ควรรอบ

$$1. \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$2. \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$3. \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$4. \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$5. \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$6. \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$7. 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$8. 1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$